

פיזיקה 1 מכניקה

פרק 18 - תנועה הרמונית

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה 1
2. תרגילים מסכמים 4
3. תרגילים למתקדמים 7

תנועה הרמונית פשוטה:

שאלות:

(1) מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k . מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצא את $x(t)$ של המסה.

(2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



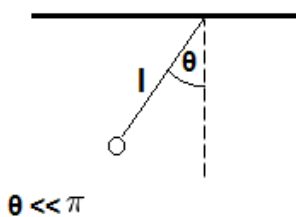
מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M .

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.

ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)

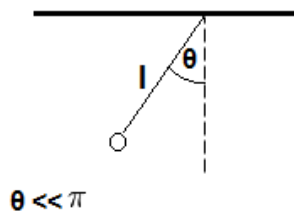


נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה. אורך החוט של המטוטלת הוא l . מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן. הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך מומנטים).

(4) דוגמה - דיסקה עם חור



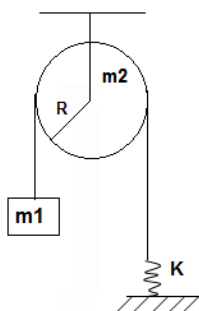
מצא את תדירות התנודות הקטנות של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R אם ידוע כי במרחק R ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע R (הדיסקה מחוברת במסמר במרכזה אל הקיר).



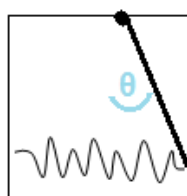
- (5) **דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**
 נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
 אורך החוט של המטוטלת הוא l .
 מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
 הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).



- (6) **גליל מחובר לקפיץ מתגלגל ללא החלקה**
 גליל בעל מסה m ורדיוס R נמצא על משטח אופקי לא חלק ומחובר באמצעות קפיץ אל הקיר. קבוע הקפיץ הוא k והוא מחובר למרכז הגליל. הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד ושהוא מתגלגל ללא החלקה על המשטח.
 מצא את תדירות התנודות הקטנות.
 פתור פעם אחת באמצעות אנרגיה ופעם נוספת באמצעות כוחות ומומנטים.



- (7) **גלגלת מסה וקפיץ**
 במערכת הבאה, המסה m_1 קשורה בחוט דרך גלגלת אל קפיץ המחובר לקרקע. הגלגלת אינה אידאלית. נתון: R רדיוס הגלגלת, m_2 מסת הגלגלת, k קבוע הקפיץ. הנח כי החוט לא מחליק על הגלגלת.
 א. מצא את נקודת שיווי המשקל.
 ב. מצא את תדירות התנודה.
 ג. מושכים את המסה אורך d מנקודת שיווי המשקל. מהו $d_{\max}$ המרחק המקסימלי שניתן למשוך את המסה מבלי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?



- (8) **מוט תלוי מחובר עם קפיץ לקיר**
 מוט בעל אורך L ומסה M (התפלגות אחידה) תלוי מהתקרה וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה. קצהו השני של המוט מחובר בקפיץ, בעל קבוע k לקיר. הקפיץ רפוי כאשר המוט נמצא מאונך לתקרה.
 א. הראה כי תנועת המוט בזוויות קטנות היא תנועה הרמונית ומצא את תדירות התנועה.
 ב. מצא את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה θ_0 .

תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\theta(t=0) = -\omega A \sin \varphi \quad (3)$$

$$-\left(\frac{16}{247} \frac{g}{R}\right)(\theta - 0) = \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

$$E = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad \text{באמצעות אנרגיה:} \quad (6)$$

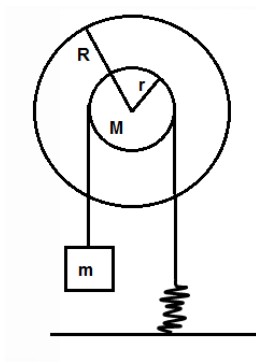
$$\sum F_x = -k(x - x_3) = m\ddot{x} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad \text{באמצעות כוחות ומומנטים:}$$

$$d_{\max} = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{1}{2}m_2}} \quad \text{ב.} \quad x_0 = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k^+}{m^+}}t\right) \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k^+}{m^+}} \quad \text{א.} \quad (8)$$

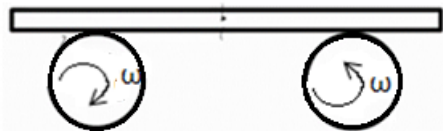
תרגילים מסכמים:

שאלות:



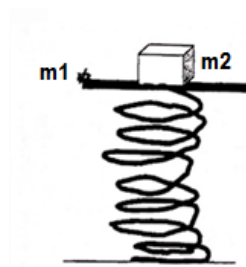
(1) דיסקה כפולה מסה וקפיץ

נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
הדיסקה בנויה משתי דיסקות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.
עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.
א. מצאו את תדירות התנודות.
ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?



(2) מוט על שני גלגלים

מוט בעל מסה M מונח על שני גלגלים המקובעים במרכזם.
הגלגלים מסתובבים במהירות זוויתית ω כך שהגלגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון והשמאלי עם כיוון השעון.
בין המוט והגלגלים קיים חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון.
מניחים את המוט כך שמרכזו נמצא במרחק A מהמרכז בין הגלגלים.
מצא את תדירות התנודה של המוט.



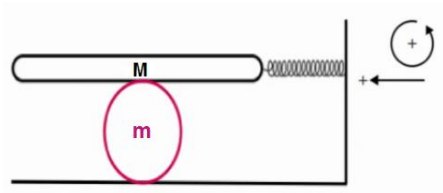
(3) מסה על משטח על קפיץ אנכי

על קפיץ שקבועו k מונח משטח שמסתו m_1 , המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ.
על המשטח מונח גוף שמסתו m_2 .
מכווצים את הקפיץ בשיעור Δy ומשחררים.
א. מה צריך להיות $\Delta y_{\min}$ כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

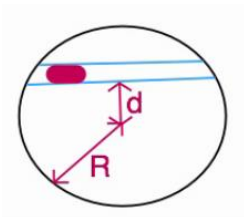
ב. הניחו: $\Delta y = 2\Delta y_{\min}$, $k = 10 \frac{Nr}{m}$, $m_1 = 0.04 \text{ kg}$, $m_2 = 0.06 \text{ kg}$

ומצאו את רגע הניתוק.

ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?



- (4) **משטח על דיסקה מחובר לקפיץ**
 נתונה מערכת כבשרטוט (אין החלקה במערכת).
 מהי התדירות?



- (5) **תנודה בתעלה בכדור"א**
 בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט.
 מסת כדור הארץ M.
 מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

- (6) **שתי מסות מחוברות בקפיץ****
 שתי מסות m_1 ו- m_2 מחוברות בקפיץ בעל קבוע k ואורך רפוי l .
 המסות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק.
 נותנים דחיפה ימינה למסה m_1 המקנה לה מהירות התחלתית v_0 .
 א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הבעיה)?
 רמז: על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים
 ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad x_{rel} = x_1 - x_2$$

- ב. מצאו את מיקום המסה m_2 כתלות בזמן.

תשובות סופיות:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} Kx^2 - mgx + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \text{ב.} \quad \sqrt{\frac{2kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_k g}{d}} \quad (2)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{ב.} \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -2\Delta y_{\min} \omega \sin(\omega t), \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{ג.}$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{K}{m + 2M}\right)x \quad (4)$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{M}{R^3}\right)(x - 0) \quad (5)$$

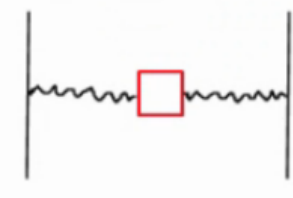
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$, A = \frac{\sqrt{v_0^2 + l^2 \omega^2}}{\omega}, x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m} (l + v_0 t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ב.}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega l}$$

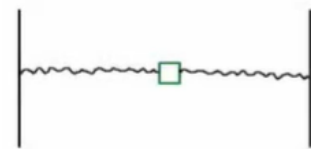
תרגילים למתקדמים:

שאלות:



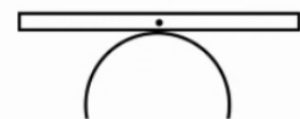
(1) מסה בין שני קפיצים עם אורך זניח

- בין שני קירות במרחק $2L$ נמצאת מסה m המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם k ואורך רפוי זניח.
- א. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה- x .
- ב. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה- y .



(2) מסה בין שני קפיצים** (אורך רפוי לא זניח)

- בין שני קירות במרחק $2L$ נמצאת מסה m המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם k ואורך רפוי l_0 .
- מצא את תדירות התנודות הקטנות בציר ה- y .



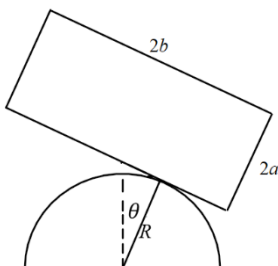
(3) מוט על חצי כדור**

- מוט בעל אורך l ומסה m מונח על כדור בעל רדיוס R .
- א. מצא את תדירות התנודות הקטנות של המוט.
- ב. מצא את גובה מרכז המסה של המוט כפונקציה של זווית ההטיה.



(4) עכביש בשיווי משקל יציב*

- מוט בעל מסה M ואורך l מחובר ברבע מגובהו לציר מתחתית המוט עכביש בעל מסה m מטפס כלפי מעלה.
- מצא את תדירות המערכת כפונקציה של מיקום העכביש ומצא את משקל העכביש המקסימלי שישאיר את המערכת בשיווי משקל יציב.

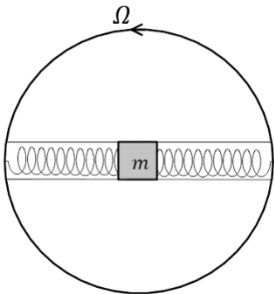


(5) תיבה על כיפה חצי כדורית**

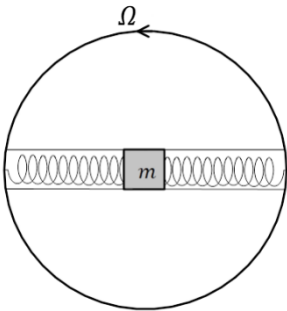
- תיבה שמסתה M מונחת על כיפה גלילית חצי עגולה ברדיוס R . גודל התיבה הוא $2a \times 2b$.
- מניחים את התיבה על ראש הכיפה כך שמרכזה בדיוק מעל מרכז הכיפה. לאחר מכן מטים את התיבה מעט הצידה כך שהיא מתגלגלת ללא החלקה על הכיפה.
- מצא את תדירות התנודות הקטנות של התיבה על ראש הכיפה. מה התנאי שיהיו תנודות?

6) מסה בתוך חישוק מסתובב**(כולל קוריאוליס וקורדינטות פולריות)**

גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק. המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף. הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k . מסובבים את החישוק במהירות זוויתית Ω ומרחיקים את המסה מעט מהמרכז. רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מה התנאי לתנועה הרמונית ומהי תדירות התנועה אם התנאי מתקיים? (מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).

**7) מסה בתוך חישוק מסתובב עם חיכוך****(כולל קואורדינטות פולריות, קוריאוליס, ותנועה מרוסנת)**

גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק. המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף. הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k . מסובבים את החישוק במהירות זוויתית Ω ומשחררים את המסה ממנוחה במרחק d מהמרכז. בין המסה והדופן של התעלה קיים חיכוך (אין חיכוך עם הבסיס). מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי הם: μ_s, μ_k .



- א. רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מהם התנאים לתנועה הרמונית? האם צריך את מקדם החיכוך הסטטי?
- ב. מצא את המיקום כתלות בזמן בהנחת התנאים של סעיף א', מהו מקדם האיכות של המערכת? (מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).

תשובות סופיות:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{א.} \quad \omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{ב.} \quad (1)$$

$$-\left(2k \frac{L \cdot l_0}{L}\right) y = \ddot{y} \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{12gR}{l^2}} \quad \text{א.} \quad y_{c.m} = R \left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \quad \text{ב.} \quad (3)$$

$$-\left(m' g \frac{C}{I}\right) \theta = \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g(R-a)}{\frac{1}{3}(a^2+b^2)+a^2}} \quad (5)$$

$$(-2k - \Omega^2 m) x = m \ddot{x}, \quad 2k - \Omega^2 m > 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{2k - m\Omega^2}{m}} \quad (6)$$

$$-2kx + m\Omega^2 x - 2\mu_k m\Omega \dot{x} = m \ddot{x}, \quad \Omega^2 (1 + \mu_k^2) < \frac{2k}{m} \quad \text{א.} \quad N=0 \quad \text{לא כי} \quad \text{כשהגוף נעצר.} \quad (7)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}}}{2\mu_k \Omega}, \quad x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(d \cos(\tilde{\omega}t) - \frac{d\sqrt{1-\omega_0^2}}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega}t) \right) \quad \text{ב.} \quad (8)$$